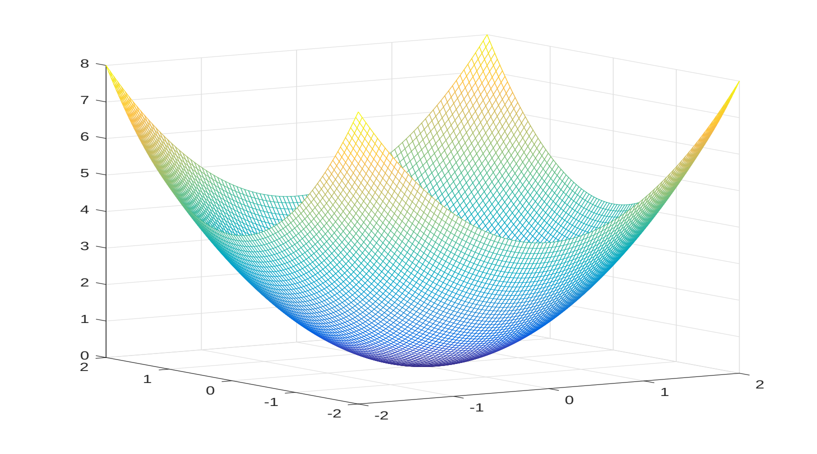
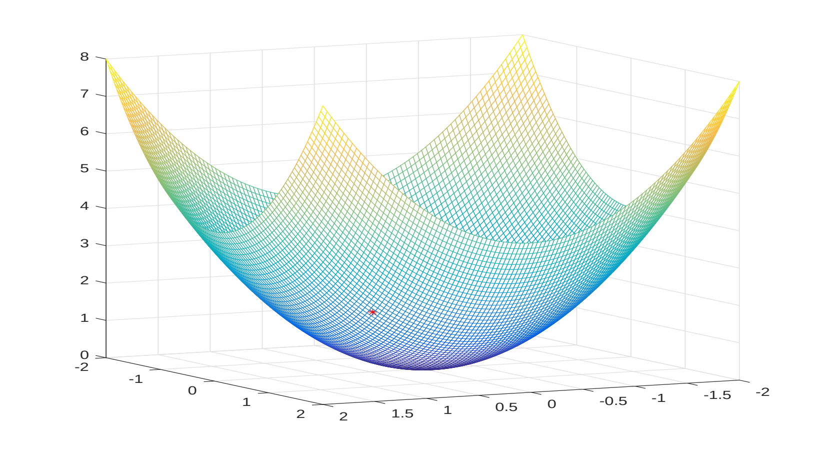
Funkcije više promenljivih - Parcijalni izvodi

November 12, 2019

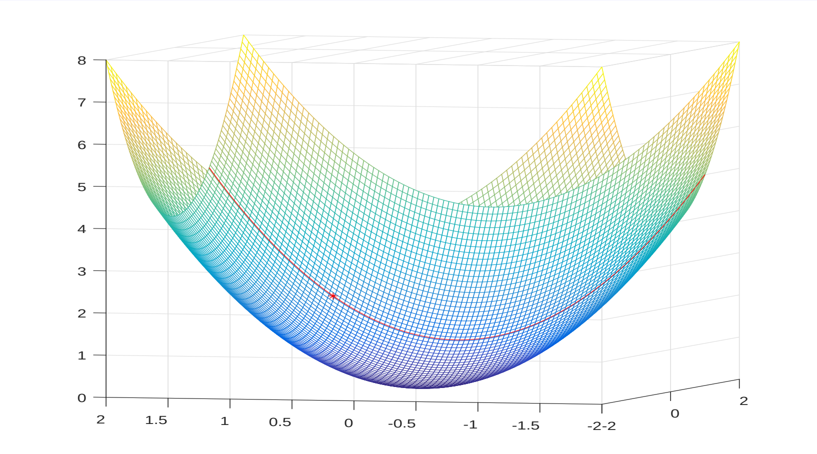
Grafik funkcije $f : [-2, 2] \to \mathbb{R},\ f(x, y) = x^2 + y^2$



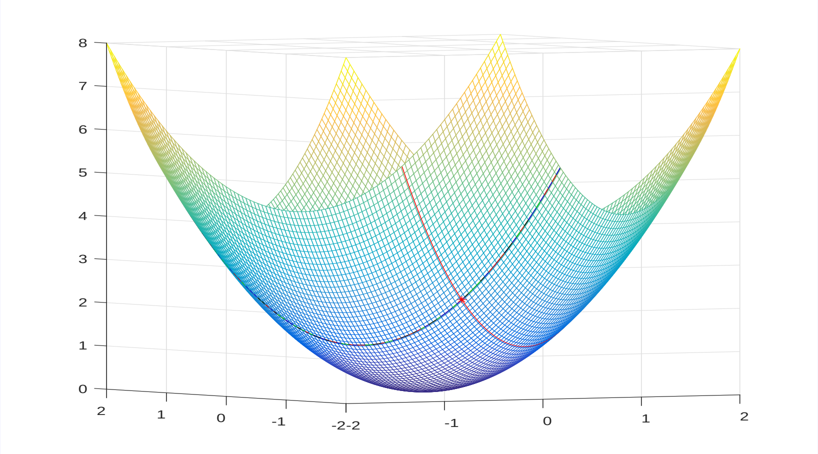
Označimo tačku $\mathbf{x}_0 = (1, 1, 2)$ sa crvenom zvezdicom (ona pripada ovoj površi).



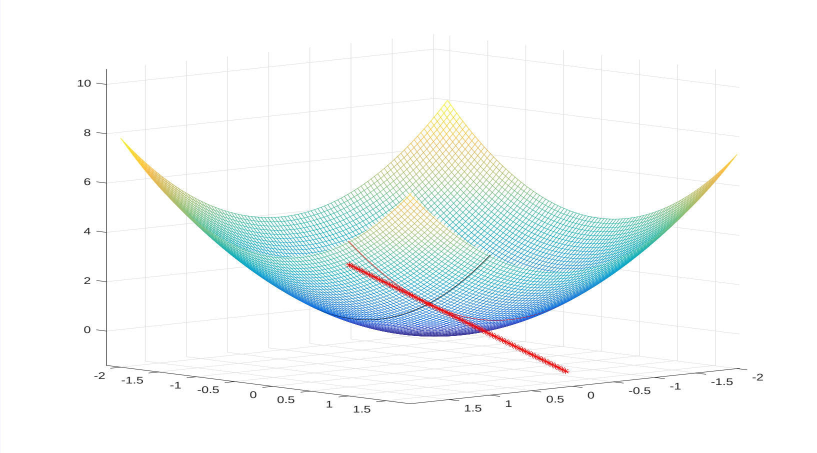
Ako bismo funkciju $f(x, y) = x^2 + y^2$ posmatrali kao funkciju jedne promenljive (fiksiramo $y = 1$) dobijamo funkciju jedne promenljive $f(x, 1) = x^2 + 1^2$ (na grafiku crvena linija koja pripada površi).



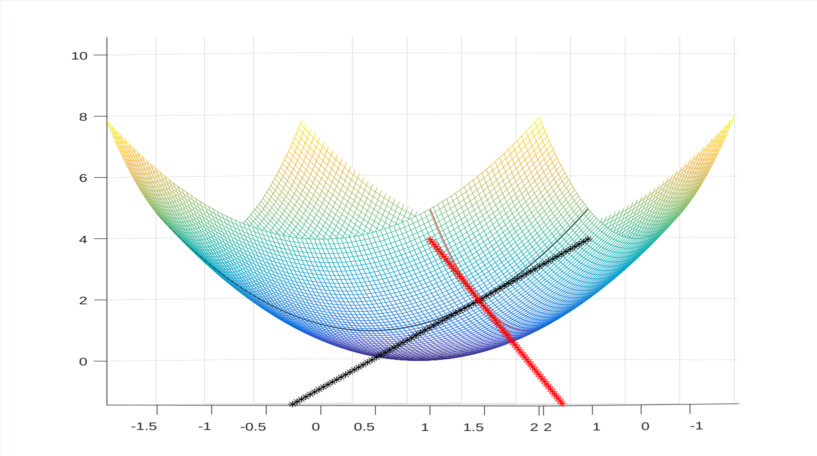
Ako bismo umesto y sada fiksirali $x = 1$ dobijamo opet funkciju jedne promenljive $f(1, y) = 1^2 + y^2$ (na grafiku crna linija koja pripada površi).



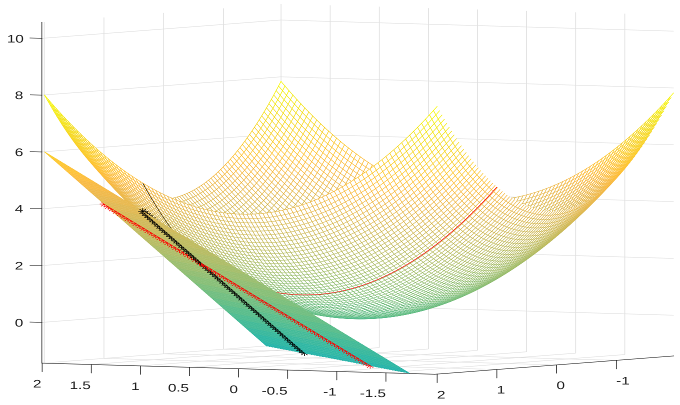
Da bismo odredili tangentu funkcije $f(x,1) = x^2 + 1$ (crveno) u tački $x_0 = (1,1)$ treba da odredimo izvod ove funkcije po promenljivoj x, tj. $f'_x(x,1) = 2x$ (crvena prava na grafiku).



Da bismo odredili tangentu funkcije $f(1, y) = 1 + y^2$ (crno) u tački $x_0 = (1, 1)$ treba da odredimo izvod ove funkcije po promenljivoj y, tj. $f'_y(1, y) = 2y$ (crna prava na grafiku).



Ove dve prave (crvena i crna tangenta) određuju jednu ravan, tj. tangentnu ravan na površ.

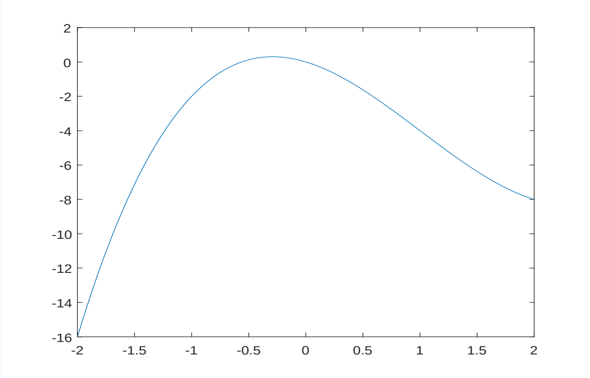


Izvodi realne funkcije jedne realne promenljive

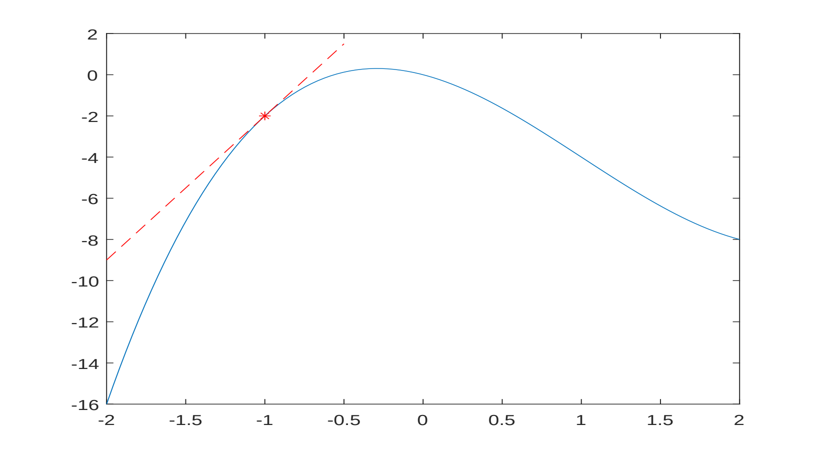
Za funkciju jedne promenljive $f : D_f \to \mathbb{R},\ D_f \subseteq \mathbb{R}$ izvod u tački a predstavlja nagib tangente na f u tački $(a, f(a))$ i određuje se preko:

$$f'(a) = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}.$$

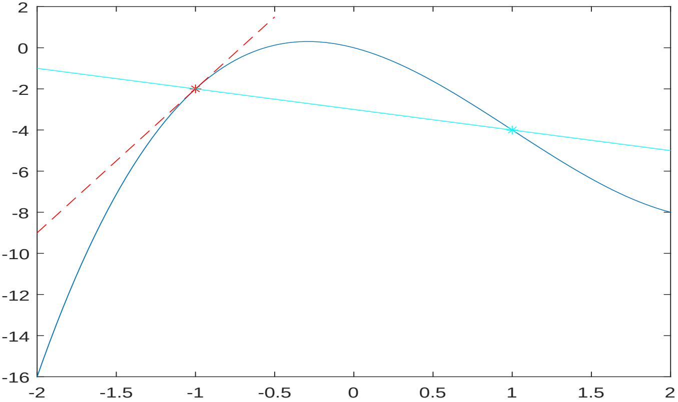
Neka je data funkcija $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}\ f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x$.



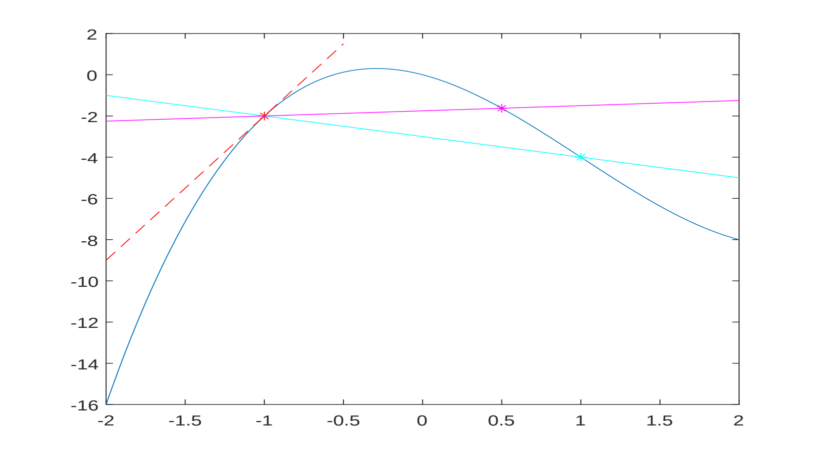
Želimo da odredimo tangentu u tački $(-1, -2)$ (crvena tačka na grafiku). To će biti prava (crvena isprekidana linija).



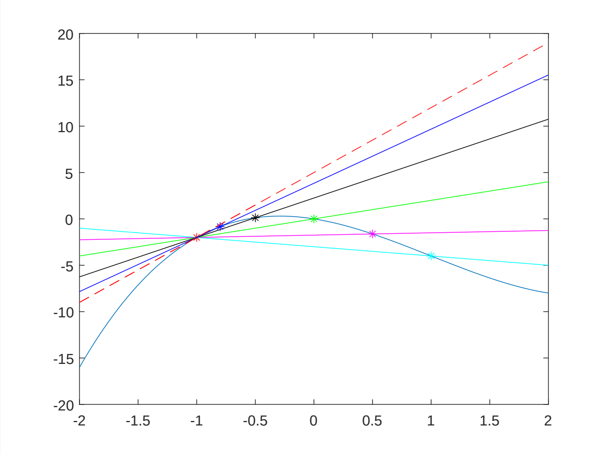
Posmatrajmo našu (crvenu) tačku $(a, f(a)) = (-1, -2)$ i neka je $h = 2$. Imamo novu tačku $(a+h, f(a+h)) = (1, -4)$ (na grafiku svetlo plava zvezdica). Prava određena sa ove dve tacke je svetlo plave boje.



Smanjimo h na $h = 1.5$. Imamo novu tačku $(a+h, f(a+h)) = (0.5, -1.625)$ (na grafiku roze zvezdica). Prava određena sa ove dve tacke je roze boje.

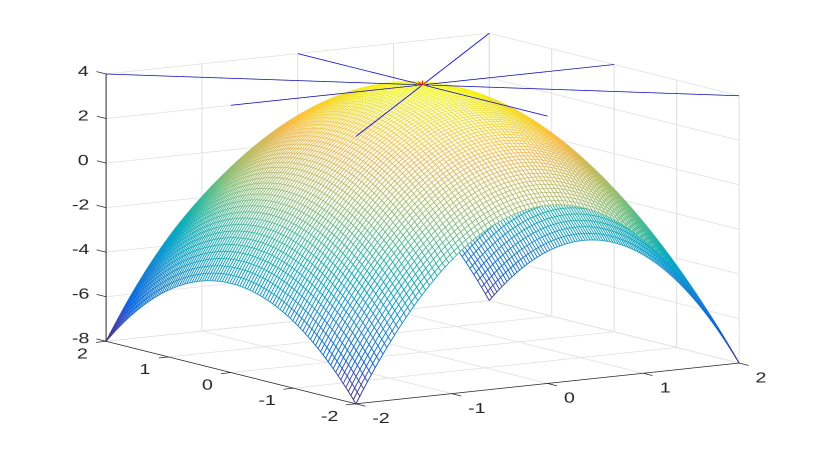


Smanjimo h na $h = 1$. Imamo tačku $(a+h, f(a+h)) = (0,0)$ (zelena zvezdica). Prava određena sa ove dve tacke je zelene boje.
Smanjimo h na $h = 0.5$. Imamo tačku $(a+h, f(a+h)) = (-0.5, 0.125)$ (crna zvezdica). Prava određena sa ove dve tacke je crne boje.
Smanjimo h na $h = 0.2$. Imamo tačku $(a+h, f(a+h)) = (-0.8, -0.832)$ (plava zvezdica). Prava određena sa ove dve tacke je plave boje.

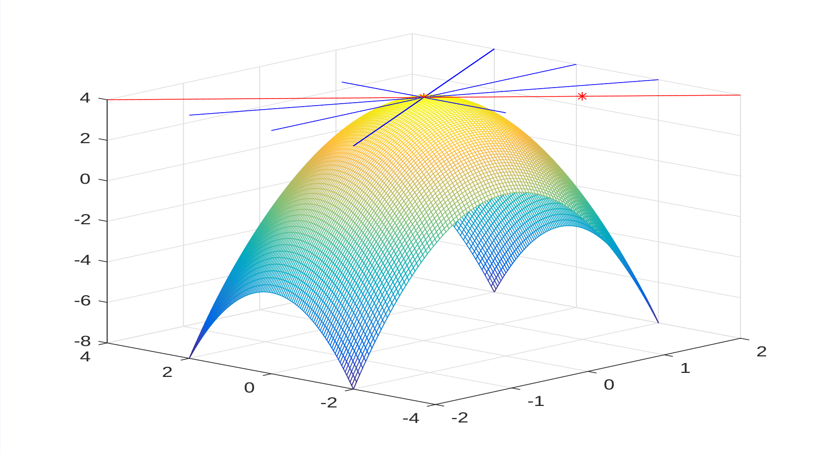


Izvod u pravcu (funkcije više promenljivih)

Neka je $f : [-2, 2] \to \mathbb{R}$, $f(x, y) = 4 - 2x^2 - y^2$, tačka $\mathbf{x}_0 = (0, 0, 4)$ (crvena zvezdica), a plave prave su tangente na f u $\mathbf{x}_0$.



Crvena prava - tangenta na f u tački $\mathbf{x}_0$ koja sadrži tačku $\mathbf{a} = (1, -2, 4)$ (druga crvena zvezdica van površi) tj. tangenta u pravcu vektora $\mathbf{a}$.



Definicija

Neka je $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{x}_0$ unutrašnja tačka skupa D_f i $\vec{\boldsymbol{a}} \neq \boldsymbol{0}$ vektor. Granična vrednost

$$f'_{\vec{\boldsymbol{a}}}(\boldsymbol{x}_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(\boldsymbol{x}_0 + h \cdot \boldsymbol{a}) - f(\boldsymbol{x}_0)}{h}$$

ukoliko postoji, zove se ***izvodom funkcije*** f ***u tački*** $\mathbf{x}_0$ ***u pravcu vektora*** $\vec{\boldsymbol{a}}$.

Posmatrajmo pravce određene baznim vektorima prostora $\mathbb{R}^n$:
$\mathbf{e}_1 = (1, 0, ..., 0), ..., \mathbf{e}_n = (0, ..., 0, 1)$.
(Izvođenje na času)

Parcijalni izvod

Definicija

*Neka je $f : D_f \to \mathbb{R}$, $D_f \subseteq \mathbb{R}^n$ definisana u okolini tačke $\boldsymbol{a} = (a_1, ..., a_n)$ i neka je $\boldsymbol{e}_k$ k-ti vektor standardne baze u $\mathbb{R}^n$. Ukoliko postoji izvod funkcije f u tački **a** pravcu vektora $\boldsymbol{e}_k$ zovemo ga **parcijalni izvod funkcije** f **po promenljivoj** x_k **u tački a** tj.*

$$\begin{aligned}\frac{\partial f(\boldsymbol{a})}{\partial x_k} &= \lim_{h\to 0} \frac{f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{e}_k) - f(\boldsymbol{a})}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{f(a_1, ..., a_{k-1}, a_k + h, a_{k+1}, ..., a_n) - f(a_1, ..., a_n)}{h}.\end{aligned}$$

Ako postoji parcijalni izvod funkcije f po promenljivoj x_k u tački **a**, onda kažemo da je funkcija f **diferencijabilna po k-toj promenljivoj** u tački **a**.

Na času:

- Parcijalni izvodi višeg reda
- Gradijent
- Diferencijabilnost
- Jakobijeva matrica
- Izvod složene funkcije